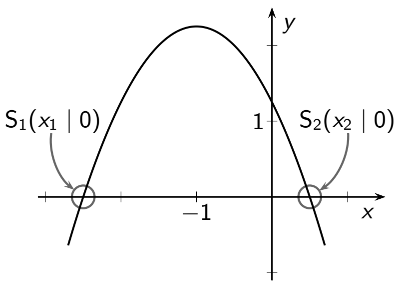
Inhaltsverzeichnis

Achsenschnittpunkte

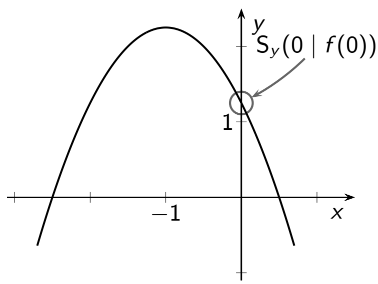
Basics.

x-Achse



Ansatz: $y = f(x) = 0$ nach x auflösen

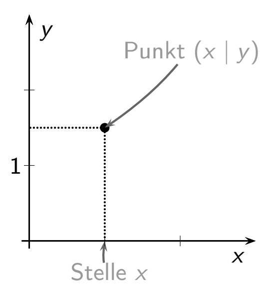
y-Achse



Ansatz: $x = 0 \Rightarrow f(0)$ berechnen

Good to know.

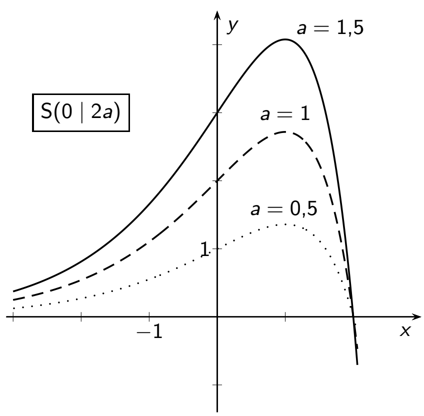
Punkt $\neq$ Stelle



Stellen werden jeweils durch einen x-Wert beschrieben.

Punkte bestehen jeweils aus einem x- und einem y-Wert.

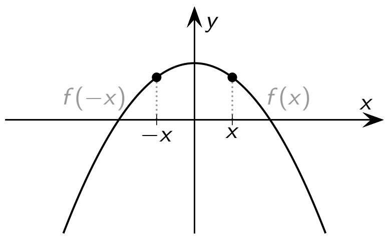
Durch Achsenschnittpunkte können z.B. Graphen G_a einer Funktionsschar f_a $\boxed{\text{Scharparameter}}$ zugeordnet werden:



Symmetrie

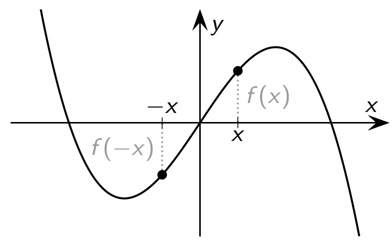
Basics.

Achsensymmetrie zur y-Achse



$\boxed{\text{Zeige: } f(-x) = f(x)}$

Punktsymmetrie zum Ursprung



$\boxed{\text{Zeige: } -f(-x) = f(x)}$

Good to know.

Ganzrationale Funktionen

- achsensymmetrisch zur y-Achse, solange alle Exponenten gerade sind

$$f(x) = 3x^4 - x^2 + 5$$

- punktsymmetrisch zum Ursprung, solange alle Exponenten ungerade sind

$$f(x) = 0{,}5x^3 - x$$

Schreibweise

Die Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{x^2}$ soll auf Symmetrie untersucht werden.

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x) \cdot e^{(-x)^2} \\ &= -x \cdot e^{x^2} \\ &\neq f(x) \end{aligned}$$

Der Graph von f ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.

$$\begin{aligned} -f(-x) &= -\left(-x \cdot e^{(-x)^2}\right) \\ &= x \cdot e^{x^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Funktionsrekonstruktion

Basics.

Am Beispiel

1. Ansatz	$f(x) = ax^2 + bx + c$ $f'(x) = 2ax + b$
2. Eigenschaften	$f(0) = -2{,}5$ schneidet y-Achse bei $y = -2{,}5$ $f'(3) = 0$ lokales Extremum bei $x = 3$ $f(3) = 2$ Extrempunkt $E(3 \mid 2)$ liegt auf G_f
3. LGS aufstellen	$\mathrm{I}: -2{,}5 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$ $\mathrm{II}: 0 = 2a \cdot 3 + b$ $\mathrm{III}: 2 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c$
4. LGS lösen	$a = -0{,}5, \quad b = 3, \quad c = -2{,}5$
5. Funktionsgleichung	$f(x) = -0{,}5x^2 + 3x - 2{,}5$

Good to know.

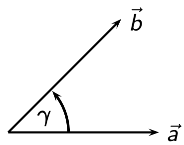
Vokabelliste

typische Formulierung in der Aufgabe	Ansatz
... verläuft achsensymmetrisch zur y-Achse	$f(x)$ hat nur gerade Exponenten z.B. $f(x) = ax^2 + c$
... verläuft punktsymmetrisch zum Ursprung	$f(x)$ hat nur ungerade Exponenten z.B. $f(x) = ax^3 + cx$
... enthält den Punkt $P(2 \mid 4)$	$f(2) = 4$
... Nullstelle bei $x = 3$ und y-Achsenabschnitt 6	$f(3) = 0 \wedge f(0) = 6$
... hat in $x = 1$ die Steigung 3	$f'(1) = 3$
... lokale Extremstelle/ waagerechte Tangente bei $x = 5$	$f'(5) = 0$
... hat ein lokales Extremum bei $E(4 \mid 3)$	$f(4) = 3 \wedge f'(4) = 0$
... hat den Wendepunkt $W(5 \mid 2)$	$f(5) = 2 \wedge f''(5) = 0$
... hat den Sattelpunkt $S(6 \mid 1)$	$f(6) = 1 \wedge f'(6) = 0 \wedge f''(6) = 0$
... hat bei $x = 1$ einen Steigungswinkel von 45°	$f'(1) = \tan 45^\circ$
... schließt im Intervall $x \in [-1; 1]$ oberhalb der x-Achse ein Flächenstück mit Inhalt 6 ein	$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 6$
... schneidet den Graphen der Funktion g in $x = 4$	$f(4) = g(4)$
... berührt den Graphen der Funktion g in $x = 1$	$f(1) = g(1) \wedge f'(1) = g'(1)$

Winkel & Skalarprodukt

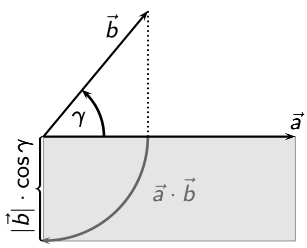
Basics.

Winkel



$$\cos\gamma = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}$$

Geometrische Deutung des Skalarprodukts



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3$$

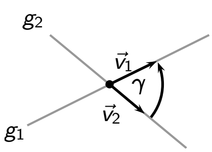
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\gamma$$

Das Skalarprodukt kann als (vorzeichenbehafteter) Flächeninhalt interpretiert werden.

Good to know.

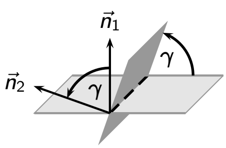
Schnittwinkel

Gerade/Gerade



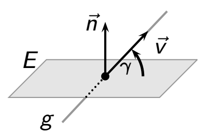
$$\cos\gamma = \frac{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2}{|\vec{v}_1|\cdot|\vec{v}_2|}$$

Ebene/Ebene



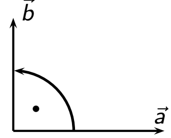
$$\cos\gamma = \frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}$$

Gerade/Ebene



$$\sin\gamma = \frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{v}|}$$

Orthogonalität



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

Hinweis: Schnittwinkel sind in der Regel $< 90^\circ$. Bei $\gamma > 90^\circ$, wird über $180^\circ - \gamma$ umgerechnet.

Lagebeziehung Gerade/Gerade

Basics.

Am Beispiel

Gerade g_1

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; r \in \mathbb{R}$$

Gerade g_2

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; s \in \mathbb{R}$$

Sind die Richtungsvektoren kollinear?

$$k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

nein → nein / ja → ja

Schnittpunkt (nein)

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

LGS lösen:
$r = 1$ und $s = -1$
$\Rightarrow S(1 \mid -2 \mid 2)$

Windschief (nein)

$$\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

LGS ist nicht lösbar

Parallel (ja)

$$\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

Punktprobe. LGS lösen liefert keinen eindeutigen Wert für s.

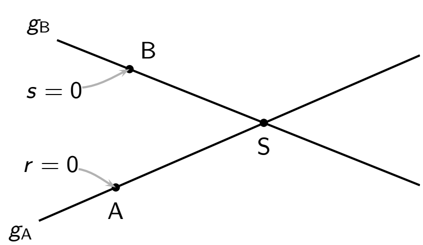
Identisch (ja)

$$\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$$

Punktprobe. LGS lösen liefert einen eindeutigen Wert für s.

Good to know.

Kollidieren zwei Flugzeuge?



Beide Flugzeuge starten zum Zeitpunkt $r = s = 0$ in den Punkten A und B. Die Fluglinien beider Flugzeuge schneiden sich im Punkt S. Daraus lässt sich schlussfolgern:

$r = s$	Die Flugzeuge kollidieren.
$r \neq s$	Die Flugzeuge kollidieren nicht.

Hypergeometrische Verteilung

Basics.

Kriterien für hypergeometrische Verteilung:

ohne Reihenfolge

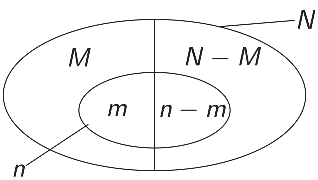
ohne Zurücklegen

typische Schreibweise:

E: *hier Ereignis definieren*

$$P(E) = \frac{\binom{M}{m} \cdot \binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}}$$

Mengen skizzieren:

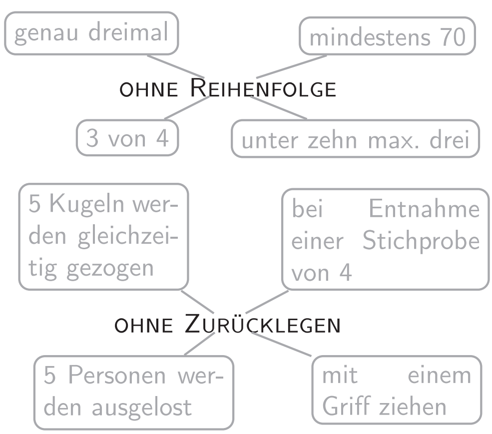


Beispiel:

N	20 gelieferte Lampen
M	6 defekte Lampen
$N-M$	14 einwandfreie Lampen
n	Stichprobe von 5 Lampen
m	2 Lampen in der Stichprobe sind defekt
$n-m$	3 Lampen in der Stichprobe sind einwandfrei

Good to know.

Signalwörter



Hypergeometrisch vs. Binomial

Ist die Grundgesamtheit N groß genug und der Stichprobenumfang n möglichst klein, gehen beide Verteilungen ineinander über. Z.B.: von den 12000 Einwohnern einer Kleinstadt treiben 2500 regelmäßig Sport. Nun werden 10 Bewohner nacheinander ausgewählt. Für die Berechnung der Verteilung der Zufallsgröße

$$X: \text{Anzahl sporttreibender Einwohner}$$

kann sowohl die hypergeometrische als auch die Binomialverteilung genutzt werden, da die Trefferwahrscheinlichkeit auch ohne Zurücklegen nahezu konstant ist.

Hypothesentest rechtsseitig

Basics.

Beispiel

1. Null- und Alternativhypothese

$H_0: \quad p \leq 0{,}20 \qquad \alpha = 0{,}05$

$H_1: \quad p > 0{,}20 \longleftarrow$ „rechtsseitig“

2. Binomialverteilung untersuchen

k	$P(X \leq k)$	
0	0,0000	Annahmebereich
1	0,0002	A
⋮	⋮	mindestens bis
14	0,9393	$1-\alpha = 95\%$
15	0,9692	
16	0,9856	Ablehnungsbereich
17	0,9937	$\overline{A}$
⋮	⋮	maximal $\alpha = 5\%$
50	1	

3. Entscheidungsregel

$$A = \{0,1,2,3\ldots,15\}$$

$$\overline{A} = \{16,17,\ldots,50\}$$

- Liegt das Versuchsergebnis in A, wird die Nullhypothese H_0 nicht abgelehnt.
- Liegt das Versuchsergebnis in $\overline{A}$, ist die Alternativhypothese statistisch gesichert.

4. α- und β-Fehler

$$\alpha = P_{H_0}(X \geq 16)$$

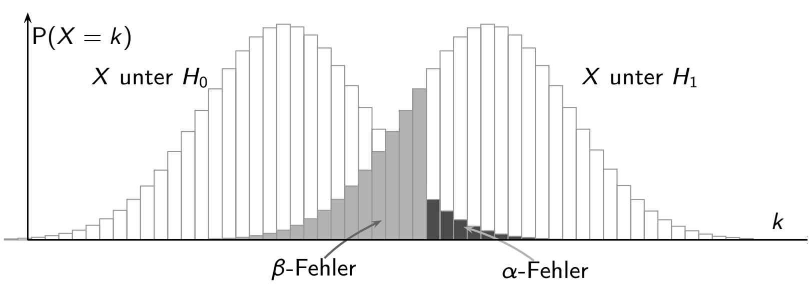
H_0 wird fälschlicherweise abgelehnt

$$\beta = P_{H_1}(X \leq 15)$$

H_0 wird fälschlicherweise angenommen

Good to know.

Güte eines Tests



Faustregel:
Der β-Fehler bestimmt die Güte eines Tests. Sollte der β-Fehler mehr als 4 mal so groß wie der α-Fehler sein, wird der Test als nicht glaubwürdig eingestuft.

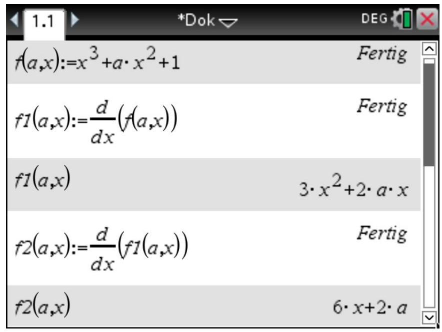
$\boxed{\text{Güte}} \qquad g(p) = 1 - \beta = 1 - P_{H_1}(k \in A)$

Anwendungsbeispiele.

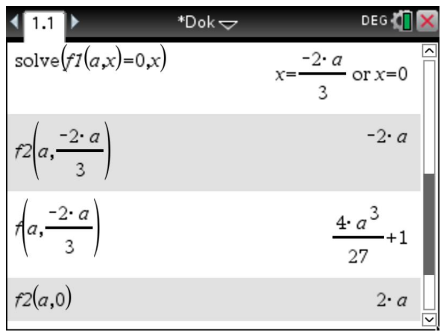
Berechnung von Extrema

Passend zu den Berechnungen im CAS sollten die Lösungen wie folgt aussehen:

$$f_a(x) = x^3 + ax^2 + 1$$
$$f_a'(x) = 3x^2 + 2ax$$
$$f_a''(x) = 6x + 2a$$



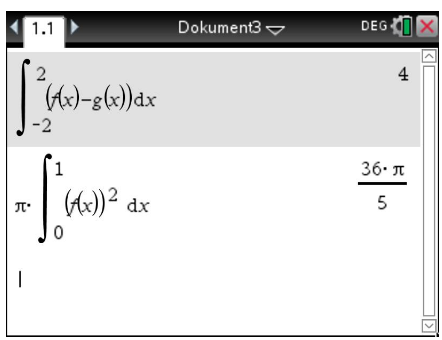
$$f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{-2a}{3} \vee x_2 = 0$$
$$f_a'\left(\frac{-2a}{3}\right) = 0 \wedge f_a''\left(\frac{-2a}{3}\right) = -2a < 0$$
$$\Rightarrow \mathrm{H}\left(\frac{-2a}{3} \mid \frac{4a^3}{27} + 1\right)$$
$$f_a'(0) = 0 \wedge f_a''(0) = 2a > 0$$
$$\Rightarrow \mathrm{T}\,(0 \mid 1)$$



Integralrechnung

Komplexere Probleme (wie die Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen oder ein Rotationsvolumen) können meist über $\boxed{\text{menu 4.3}}$ gelöst werden.

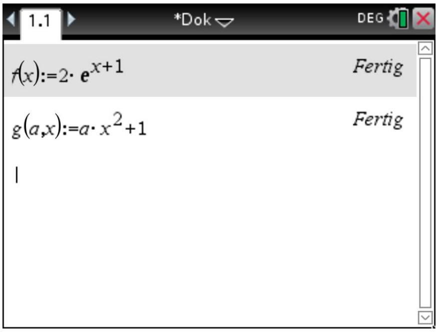
Nicht vergessen: Funktionen definieren & auf Intervallunterteilung durch Nullstellen achten!



Anwendungsbeispiele.

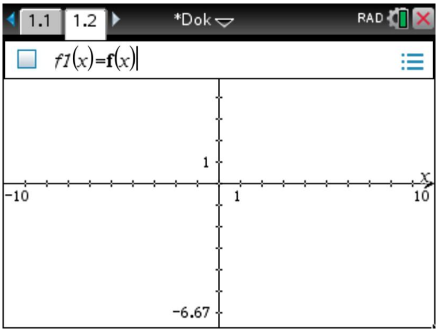
Arbeiten mit Graphs

Die Funktionen, deren Graphen dargestellt werden sollen, müssen zunächst wie üblich im Calculator definiert werden.
Über ctrl + doc ▼ wird eine neue Seite im Dokument geöffnet und über 2: Graphs gewählt.



Jetzt sollte bereits eine Zeile offen sein, in der $f1(x) =$ steht. Hier wird die Funktionsbezeichnung eingesetzt. Durch Bestätigung mit enter sollte eure Funktion erscheinen.

Tipps:
Ist das Fenster zu klein oder zu groß, kann das über menu 4.3/4 angepasst werden. Exakter ist das mit den Fenstereinstellungen menu 4.1 möglich.



Wird der Graph nicht angezeigt, kann es sein, dass er außerhalb des angezeigten Bereiches liegt.
Über tab kann das Eingabefeld erneut geöffnet und weitere Graphen hinzugefügt werden. Bezeichnungen lassen sich per *drag* & *drop* mit dem Zeiger verschieben.